

含双时滞振动主动控制系统的稳定性分析

孙清¹, 刘正伟¹, 伍晓红², 张斌¹

(1. 西安交通大学土木工程系, 710049, 西安; 2. 西安交通大学航天航空学院, 710049, 西安)

摘要: 采用增量谐波平衡法求得了含双时滞振动主动控制系统的周期解, 并利用庞加莱定理对周期解进行了稳定性分析, 得到了系统周期解关于时滞量和反馈控制增益变化的稳定性区域. 分析了稳定性区域随时滞量和反馈控制增益的变化规律, 结果表明, 两个反馈控制增益的相对大小决定着与之相关的两个时滞对系统稳定性区域影响的大小, 当时滞量和反馈控制增益匹配适当时, 可以使系统保持稳定状态. 此结果可为时滞反馈控制策略的设计提供依据.

关键词: 时滞; 振动主动控制; 增量谐波平衡法; 庞加莱定理; 系统稳定性

中图分类号: O317 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2010)01-0112-05

Stability Analysis of Active Vibration Control System Involving Double Time Delays

SUN Qing¹, LIU Zhengwei¹, WU Xiaohong², ZHANG Bin¹

(1. Department of Civil Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China;

2. School of Aerospace, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: The periodic solution of the active vibration control system involving double time delays is solved using the incremental harmonic balance method (IHB). The stability analysis of the periodic solution is carried out following the Poincare theorem. The system stability regions with respect to time delay and feedback gain are obtained, and the variation of the stability regions with the time delay and the feedback gain is investigated. The results show that the influence level of the two time delays on the system stability region is determined by the relative magnitude of the two feedback gains. The system always keeps stable state when the time delay and the feedback gain get matched, which provides evidence to the control strategy design of time-delayed feedback.

Keywords: time delay; active vibration control; incremental harmonic balance method; Poincare theorem; system stability

结构振动主动控制技术改变了工程结构抗御灾害的传统概念和方法, 使得工程结构抗御灾害的能力和水平大幅度提高, 被认为是减轻结构振动反应的有效手段^[1]. 然而, 结构振动主动控制系统从信号的采集处理、控制律运算处理到控制作用的施加都需要一定的时间, 这就导致了控制的时间滞后^[2]. 时滞对控制系统性能的影响很大, 它使系统的稳定性变差, 表现出复杂的动力学行为, 大大增加了系统控

制的难度. 研究含时滞受控系统的稳定性, 是振动主动控制技术在工程应用中应解决的关键问题^[3]. 到目前为止, 时滞系统稳定性研究的方法主要有两种: 时域法和频域法. 时域法主要是基于 Lyapunov 函数或 Lyapunov 泛函分析系统的稳定性^[4-10], 但对于大量的实际系统来说, 很难构造出相应的 Lyapunov 函数或 Lyapunov 泛函. 频域法中应用最广泛的是特征值方法, 如 Michiels 等人利用特

征值方法分析了时变时滞系统的稳定性^[11],Parlakqi 研究了不确定线性时滞系统的鲁棒稳定性问题^[12],Chen 研究了离散时滞系统的鲁棒稳定性问题^[13].然而,由于时滞受控系统的特征方程通常是含有指数函数的超越方程,因此很难求解出其全部特征值.

本文采用增量谐波平衡法求解双时滞反馈控制系统的周期解,在此基础上采用庞加莱定理判断周期解的稳定性,得到系统周期解关于时滞量的稳定性区域和不稳定性区域,避免了特征方程求解的困难,并且根据计算结果分析了稳定性区域随时滞量和反馈控制增益的变化规律.

1 振动主动控制系统的运动微分方程

考虑具有位移时滞反馈和速度时滞反馈、外激励为简谐激励的线性振动主动控制系统,其运动微分方程可用如下形式表示

$$y(\tau) + 2\xi\dot{y}(\tau) + y(\tau) = F(\tau) + s_1y(\tau - u_1) + s_2\dot{y}(\tau - u_2) \tag{1}$$

式中: ξ 为阻尼系数; s_1 、 s_2 为位移反馈控制增益和速度反馈控制增益; u_1 、 u_2 为位移反馈时滞和速度反馈时滞; $F(\tau)$ 为外激励,取 $F(\tau) = f\sin(\omega\tau)$,其中 ω 为激励频率, f 为外激励幅值.本文采用增量谐波平衡法求解方程(1).

2 时滞微分方程的求解

首先对式(1)进行归一化.设 $t = \omega\tau$; $y(\tau) = x(t)$ 则

$$\begin{aligned} \dot{y}(\tau) &= \omega\dot{x}(t); \quad \ddot{y}(\tau) = \omega^2\ddot{x}(t); \\ F(\tau) &= fsint; \quad y(\tau - u_1) = x(t - \omega u_1); \\ y(\tau - u_2) &= x(t - \omega u_2) \end{aligned} \tag{2}$$

将式(2)及式(3)代入式(1),整理得 $\omega^2\ddot{x} + 2\xi\omega\dot{x} + x = fsint + s_1x(t - \omega u_1) + \omega s_2\dot{x}(t - \omega u_2)$ (4)

令 x_0 和 ω_0 表示振动过程的某一状态,则邻近的状态可以表示为增量的形式

$$x = x_0 + \Delta x; \quad \omega = \omega_0 + \Delta\omega \tag{5}$$

将式(5)代入式(4),并略去高阶小量后,得到以 Δx 、 $\Delta\omega$ 为未知量的增量方程

$$\begin{aligned} \omega_0^2\Delta\ddot{x} + 2\xi\omega_0\Delta\dot{x} + \Delta x &= R - 2\omega_0\Delta\omega\ddot{x}_0 - 2\xi\Delta\omega\dot{x}_0 + \\ s_1[x_0(t - \omega_0u_1 - \Delta\omega u_1) + \Delta x(t - \omega_0u_1 - \Delta\omega u_1)] + \\ s_2(\Delta\omega + \omega_0)\dot{x}_0(t - \omega_0u_2 - \Delta\omega u_2) + \\ s_2\omega_0\Delta\dot{x}(t - \omega_0u_2 - \Delta\omega u_2) - \end{aligned}$$

$$s_1x_0(t - \omega_0u_1) - s_2\omega_0\dot{x}_0(t - \omega_0u_2) \tag{6}$$

式中

$$R = fsint + s_1x_0(t - \omega_0u_1) + s_2\omega_0\dot{x}_0(t - \omega_0u_2) - (\omega_0^2\ddot{x}_0 + 2\xi\omega_0\dot{x}_0 + x_0) \tag{7}$$

为不平衡力.当 x_0 和 ω_0 为精确解时,有 $R=0$. 设微分方程的解为

$$\begin{aligned} x_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} [a_n\cos(nt) + b_n\sin(nt)]; \\ \Delta x &= \sum_{n=0}^{\infty} [\Delta a_n\cos(nt) + \Delta b_n\sin(nt)] \end{aligned} \tag{8}$$

将式(8)代入式(6)中,并令方程两边谐波项的系数相等,可得

$$[D]\{\Delta a\} = \{P\} + \{Q\}\Delta\omega \tag{9}$$

式中: $[D]$ 为 $2n \times 2n$ 的矩阵, $\{\Delta a\}$ 、 $\{P\}$ 和 $\{Q\}$ 为 $2n \times 1$ 的列阵,表达式如下

$$[D] = \begin{bmatrix} d_{1,1} & \cdots & d_{1,2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{2n,1} & \cdots & d_{2n,2n} \end{bmatrix}$$

$\{\Delta a\} = \{\Delta a_0, \Delta b_0, \Delta a_1, \Delta b_1, \Delta a_2, \Delta b_2, \cdots, \Delta a_n, \Delta b_n\}^T$
 $\{P\} = \{p_1, p_2, \cdots, p_{2n}\}^T$; $\{Q\} = \{q_1, q_2, \cdots, q_{2n}\}^T$
其中 $d_{i,j}$ 、 $p_{i,j}$ 、 $q_{i,j}$ 为经过计算整理后所得的与各具体参数取值有关的值.

由于式(9)中未知量数比方程数多一个,因此求解时必须人为选定一个未知量为控制参数.本文选取 $\Delta\omega$ 为控制增量,取 $\Delta\omega=0$,即首先固定外激励频率为某一固定值 ω_0 ,并给定一组各谐波项系数的初值,然后将这组初值代入式(9)中求得 Δa ,然后再以 $a + \Delta a$ 代替原来的 a ,将其代入式(9)中求得新的 Δa ,如此循环迭代,直至求得的 a 满足不平衡力 $R=0$,或 R 值达到给定的精度.

3 庞加莱判别定理

用增量谐波平衡法求得的系统周期解可能为不稳定的解,也就是实际中无法实现的周期运动,因此需要对解的稳定性进行判别.本文采用庞加莱判别定理进行系统周期解的稳定性判别.

设 C_0 是自治系统的周期解,自治系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{10}$$

C_0 的方程是 $x = \varphi_0(t)$, $y = \psi_0(t)$,其中 $\varphi_0(t)$ 与 $\psi_0(t)$ 的周期为 T ,则积分

$$h_c = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\frac{\partial P}{\partial x}(\varphi_0, \psi_0) + \frac{\partial Q}{\partial y}(\varphi_0, \psi_0) \right] dt \tag{11}$$

称为 C_0 的特征指数.

庞加莱定理指出,若周期解的特征指数为负,为稳定周期解,若特征指数为正,则为不稳定周期解.庞加莱定理讨论的系统必须是自治系统,故对于本文所研究的时滞受控系统需进行一些改进.考虑如下受迫振动系统

$$\ddot{x} + f(x, \dot{x}) = F(t) \quad (12)$$

设 x_0 是已求得的解,由于某种原因产生偏离量 Δx ,即 Δx 为小的扰动量,且有

$$x = x_0 + \Delta x \quad (13)$$

将式(13)代入振动方程(12),略去高阶小量,并注意 x_0 也满足振动方程(12),整理后得到以 Δx 为未知量的方程

$$\Delta \ddot{x} + f(\Delta x, \Delta \dot{x}) = 0 \quad (14)$$

方程(14)为摄动方程,即从已知的平衡位置摄动而得到的方程.它也可以从增量方程中令 $R=0$ 、 $\Delta\omega=0$ 而得到.因此,原方程(12)的定常解的稳定性对应于上面新得出方程的解的稳定性.

因时滞项无法直接参与公式(11)的计算,故需对方程中的时滞项进行处理.在增量谐波平衡法中,将解的形式设为

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] \quad (15)$$

将式(15)分别进行一次求导和二次求导,可以得到 x' 和 x'' 的表达式.同理,还可以得到 $x(t-u)$, $x'(t-u)$, $x''(t-u)$, $\dots$, $x^{(n)}(t-u)$ 的表达式.设

$$\left. \begin{aligned} x(t-u) &= m_{10}x(t) + m_{11}x'(t) + m_{12}x''(t) + \dots + m_{1n}x^{(n)}(t) \\ x'(t-u) &= m_{20}x(t) + m_{21}x'(t) + m_{22}x''(t) + \dots + m_{2n}x^{(n)}(t) \\ x''(t-u) &= m_{30}x(t) + m_{31}x'(t) + m_{32}x''(t) + \dots + m_{3n}x^{(n)}(t) \\ &\vdots \\ x^{(n)}(t-u) &= m_{n0}x(t) + m_{n1}x'(t) + m_{n2}x''(t) + \dots + m_{nm}x^{(m)}(t) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

将式(15)代入方程组(16)中,根据谐波平衡的原理,对方程组(16)中的每一个方程都可以得到一个代数方程组,通过求解代数方程组,可以求出 m_{10} , m_{11} , $\dots$, m_{1n} , $\dots$, m_{nm} 等待定系数.经过上述处理以后,可将函数 $x(t-u)$ 及其各阶导数转化为一列关于函数 $x(t)$ 及其各阶导数的组合.

4 算例结果及分析

对于方程(4),取 $\omega=f=1$, $\xi=0.02$, $s_1=0.4$, $s_2=0.1281$,以两个时滞作为控制参数进行计算,采

用庞加莱定理判断周期解的稳定性,并与数值解的结果进行比较.计算所得的相平面图如图1和图2所示,其中,数值方法采用变步长的龙格-库塔-费尔伯格法.

图1中,取 $u_1=1.5$, $u_2=3$,计算得到周期解的特征指数 $c_0=-0.5407$,根据庞加莱定理可知,此周期解为稳定周期解.由数值计算所得的相平面图可知,数值结果也是稳定的,数值解与解析解的结论一致.在图2中,取 $u_1=10$, $u_2=3$,计算得到周期解的特征指数 $c_0=0.0744$,根据庞加莱定理可知,此周期解为不稳定周期解.由数值计算所得的相平面图可知,数值结果也是不稳定的.

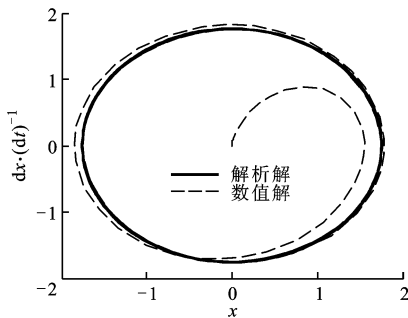


图1 当 $u_1=1.5$, $u_2=3$ 时的相平面图

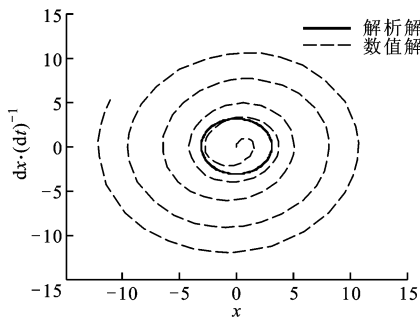


图2 当 $u_1=10$, $u_2=3$ 时的相平面图

取 $\omega=f=1$, $\xi=0.02$,以反馈控制增益作为控制参数.对每组反馈控制增益,利用庞加莱定理判断在不同时滞组合影响下周期解的稳定性,可得到系统的稳定性区域,如图3~图7所示,其中 U 代表不稳定性区域, S 代表稳定性区域.

从图3可看出,当取 $s_1=0.4$, $s_2=0.1281$ 时,系统稳定性的变化随位移反馈时滞 u_1 的变化呈带状分布,并且稳定性区域与不稳定性区域交替出现.速度反馈时滞 u_2 对系统稳定性的影响只表现在稳定性区域与不稳定性区域的分界线附近,而在远离分界线的地方, u_2 对系统的稳定性没有影响.此时,位移反馈时滞对系统稳定性的影响远大于速度反馈时滞的影响.

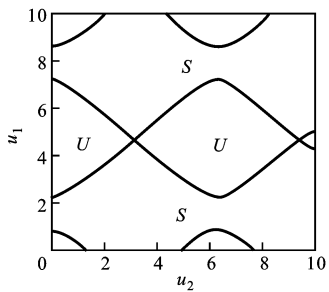


图 3 $s_1=0.4, s_2=0.1281$ 时的系统稳定性区域

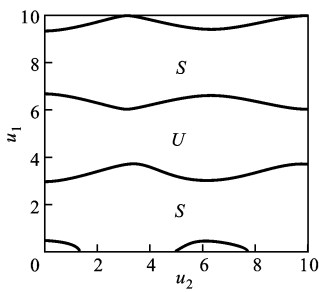


图 4 $s_1=0.4, s_2=0.36$ 时的系统稳定性区域

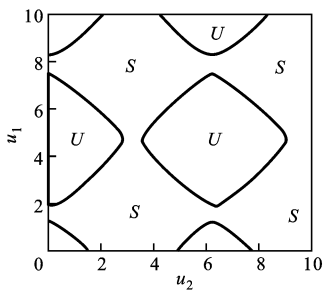


图 5 $s_1=0.4, s_2=0.4$ 时的系统稳定性区域

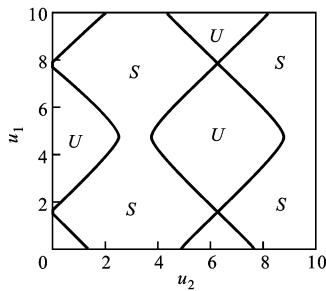


图 6 $s_1=0.4, s_2=0.44$ 时的系统稳定性区域

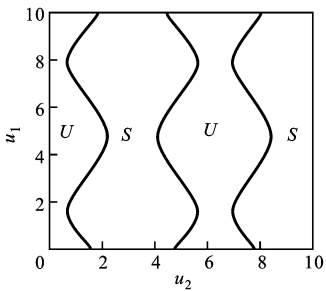


图 7 $s_1=0.4, s_2=0.6$ 时的系统稳定性区域

从图 4 可以看出,当取 $s_1=0.4, s_2=0.36$ 时,随着 s_2 增大,系统稳定性区域与不稳定性区域分界线的起伏变大,此时 u_2 对系统稳定性的影响区域增大。

比较图 3 至图 7 可以看出,当 s_1 保持不变、 s_2 逐渐增大时,系统随时滞变化的稳定性区域随之变化,且变化的规律很明显,由图 3 的横向带状分布逐渐变化到图 7 的竖向带状分布。

当 s_1 大于 s_2 时, u_1 对系统稳定性的影响大于 u_2 的影响,出现系统稳定性区域的变化基本上随 u_1 的变化呈带状分布的情况;当 s_1 等于 s_2 时, u_1 与 u_2 对系统稳定性的影响相同,出现系统稳定性区域的变化随 u_1 与 u_2 的变化同时呈带状分布的情况;当 s_1 小于 s_2 时, u_2 对系统稳定性的影响大于 u_1 的影响,出现系统稳定性区域的变化基本上随 u_2 的变化呈带状分布的情况。上述结果表明,两个反馈控制增益的相对大小,决定着与之相关的两个时滞对系统稳定性区域影响的大小,稳定性区域随与较大反馈控制增益相关的时滞项的变化呈带状分布。

5 结 论

本文分析了含双时滞反馈控制系统的稳定性,可以得出以下结论:

(1)时滞变化对振动主动控制系统稳定性的影响与传统观念不同,随着时滞量的增加,并非必然使系统由稳定状态变为不稳定状态;

(2)当时滞变化时,系统可能由稳定状态进入不稳定状态,也可能由不稳定状态进入稳定状态,当时滞量和反馈控制增益匹配适当时,总可以使系统保持稳定状态;

(3)两个反馈控制增益的相对大小,决定着与之相关的两个时滞对系统稳定性区域影响的大小,稳定性区域随与较大反馈控制增益相关的时滞项的变化呈带状分布。

上述结论对设计结构振动主动控制算法具有参考价值。

参考文献:

[1] 顾仲权,马扣根,陈卫东. 振动主动控制[M]. 北京:国防工业出版社,1997.
[2] 胡海岩,王在华. 非线性时滞动力系统的研究进展[J]. 力学进展, 1999, 29(4): 501-512.
HU Haiyan, WANG Zaihua. Review on nonlinear dynamic systems involving time delays [J]. Advances in Mechanics, 1999, 29(4): 501-512.
[3] 胡海岩. 振动主动控制中的时滞动力学问题[J]. 振动

- 工程学报, 1997, 10(3): 273-279.
- HU Haiyan. On dynamics in vibration control with time delay [J]. Journal of Vibration Engineering, 1997, 10(3): 273-279.
- [4] HE Yong, WU Min, SHE Jinhua, et al. Parameter-dependent Lyapunov functional for stability of time-delay systems with polytopic-type uncertainties [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(5): 828-832.
- [5] KHARITONOV V L, ZHABKO A P. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems [J]. Automatic, 2003, 39(1): 15-20.
- [6] WU Huaining. Delay-dependent stability analysis and stabilization for discrete-time fuzzy systems with state delay: a fuzzy Lyapunov-Krasovskii functional approach [J]. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics: B, 2006, 36(4): 954-962.
- [7] LIU Xinzhi, WANG Qing. The method of Lyapunov functionals and exponential stability of impulsive systems with time delay [J]. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 2007, 66(7): 1465-1484.
- [8] CAO Yongyan, XUE Anke. Parameter-dependent Lyapunov function approach to stability analysis and design for uncertain systems with time-varying delay [J]. European Journal of Control, 2005, 11(1): 56-66.
- [9] LIU Yubin, FENG Weizhen. Razumikhin-Lyapunov functional method for the stability of impulsive switched systems with time delay [J]. Mathematical and Computer Modelling, 2009, 49(1/2): 249-264.
- [10] PARLAKCI M N A. Extensively augmented Lyapunov functional approach for the stability of neutral time-delay systems [J]. IET Control Theory and Applications, 2008, 2(5): 431-436.
- [11] MICHELIS W, VERHEYDEN K, NICULESCU S I. Mathematical and computational tools for the stability analysis of time-varying delay systems and applications in mechanical engineering [J]. Applications of Time Delay Systems, 2007, 352: 199-216.
- [12] PARLAKCI A. Robust stability and robust stabilization of uncertain linear time-delay systems [J]. Systems Science, 2005, 31(2): 15-27.
- [13] CHEN Shinnhorng. Robust D-stability analysis for linear discrete singular time-delay systems with structured and unstructured parameter uncertainties [J]. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 2003, 20(2): 153-165.

(编辑 葛赵青)

(上接第 16 页)

- [5] MARIA A, CLAUDIA E, ANGELA M, et al. Oxidation of acetylene/ethanol mixtures and their interaction with NO [J]. Energy and Fuels, 2008, 22(6): 3814-3823.
- [6] DANIEL B O, CHARLES E M. Formaldehyde formation in large bore natural gas engines, part 2: factors affecting measured CH_2O [J]. ASME Journal of Engineering for Gas Turbine and Power, 2000, 122: 611-616.
- [7] ALZUETA M U, HERNANDEZ J M. Ethanol oxidation and its interaction with nitric oxide [J]. Energy and Fuels, 2002, 16(1): 166-171.
- [8] ZERVAS E, MONTAGNE X, LAHAYE J J. Emission of alcohols and carbonyl compounds from a spark ignition engine. influence of fuel and air/fuel equivalence ratio [J]. Environ Sci Technol, 2002, 36: 2414-2421.

(编辑 王焕雪)